

DAL PIANO ALLO SPAZIO

1.1 Gli assiomi di appartenenza

Nello spazio valgono tutti gli assiomi della geometria piana, l'esistenza dello spazio è garantita dal seguente assioma.

Assioma A4 Esiste un punto non complanare con altri tre. Quattro punti non complanari appartengono al medesimo insieme detto spazio.

Un piano è generato da tre punti non allineati ma anche da una retta e un punto esterno ad essa o da due rette incidenti.

In figura 1 lo stesso piano è visto come generato: da tre punti A, B, C, oppure da una retta r e da un punto D esterno ad essa, oppure da due rette s, t incidenti in un punto O.

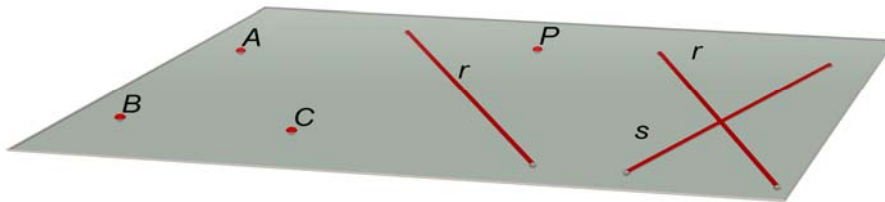


Figura 1

Def. Due rette si dicono **sghembe** se non esiste un piano che le contiene entrambe, l'esistenza di sghembe è assicurata dal seguente teorema.

A partire dall'assioma A4 si dimostra che esistono copie di rette sghembe.

Teorema1 Esistono rette sghembe.

Ipotesi: A, B, C, D punti non complanari

Tesi: le rette AB e CD sono sghembe

Dim. Tre punti non allineati definiscono un piano, chiamiamo α il piano definito dai punti A, B, C e indichiamo: con r la retta che passa per A e per B, s la retta che passa per C, D. Le rette r, s non possono essere complanari perché in tal caso lo sarebbero anche i punti A, B, C, D, contro l'ipotesi.

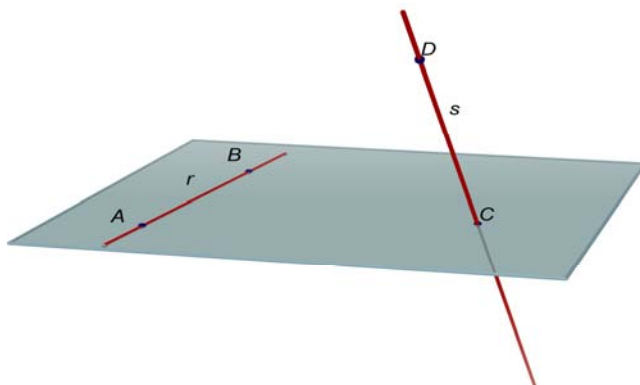


figura 2

1.2 Gli assiomi di ordine

E' necessario aggiungere un nuovo assioma a quelli di ordine della geometria piana, che continuano a valere.

Ricordiamo la proprietà di convessità del piano, *una retta divide il piano in due parti entrambi convesse*. Sostituendo in tale enunciato, alla parola *retta* la parola *piano* e alla parola *piano* la parola *spazio* otteniamo il postulato

Assioma O 5 Un piano divide lo spazio in due parti entrambe convesse.

Si dice **semispazio** ciascuna delle due parti in cui lo spazio è diviso da un piano. Tale **piano** è a sua volta detto origine dei semispazi.

Un semispazio è detto **aperto** se non contiene l'origine, **chiuso** se contiene l'origine.

Poiché il semispazio è una figura convessa:

- coppie di punti che sono nello stesso semispazio sono estremi di un segmento interamente contenuto nel semispazio stesso, come i punti A, B di figura 3
- coppie di punti che appartengono a semispazi opposti sono estremi di un segmento che interseca la loro origine comune, come i punti C, D di figura 3.

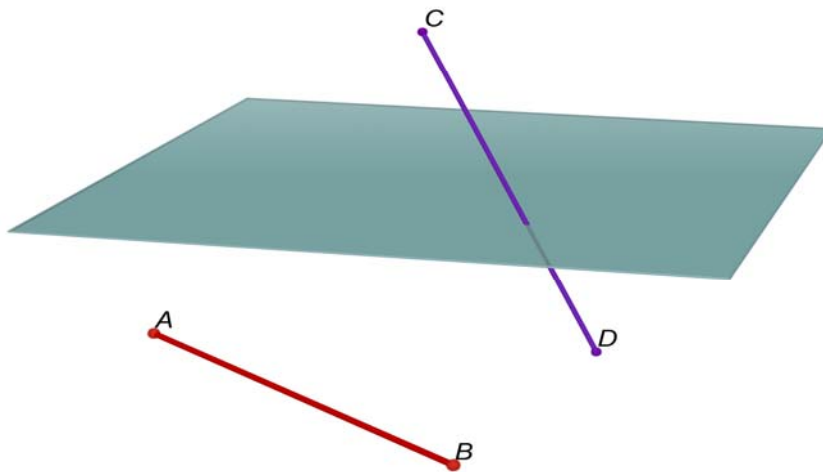


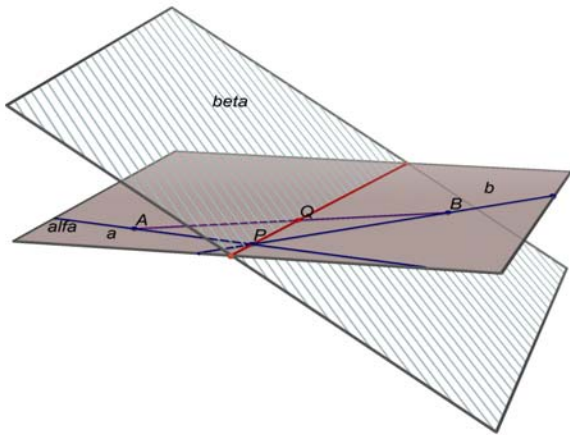
figura 3

Teorema 2 Due piani distinti, aventi un punto in comune, hanno in comune un'intera retta passante per quel punto.

Ipotesi: α, β piani incidenti

P punto comune ai piani α e β

Tesi: esiste una retta per P comune ai piani α e β



DIM. Disegniamo nel piano α due rette a, b passanti per P . Se una delle due appartiene al piano β la dimostrazione è conclusa. Se nessuna delle due è nel piano β indichiamo con A un punto di a e con B un punto di b situati in semispazi opposti di origine β . Il segmento AB appartiene al piano α e interseca il piano β in un punto Q per l'assioma O5. Allora i punti P, Q appartengono entrambi ai piani α, β e vi appartiene anche la retta che passa per P e Q .

Figura 4

Visto che due piani incidenti hanno in comune una retta si definisce **fascio di piani** l'insieme di tutti i piani che hanno la stessa retta in comune, tale retta è detta **asse** o **sostegno** del fascio. In figura 5 sono rappresentati alcuni piani di un fascio, si vede che il sostegno del fascio divide ciascun piano in due semipiani, per questo si parla anche di fascio di semipiani.



Figura 5

Riguardo alle rette invece lavoreremo con due insiemi di rette.

- L'insieme di tutte le rette dello spazio che passano per uno stesso punto è detto **stella** di rette. Il punto comune a tutte le rette è il **centro** della stella.
- L'insieme di tutte le rette che sono complanari e passano per uno stesso punto è detto **fascio** di rette. Il punto comune a tutte le rette è il **centro** del fascio.

Ogni stella è costituita da infiniti fasci di rette, uno per ogni piano che passa per il centro della stella.